

章末問題完全解答

4章 コラム 章末問題

1. 混合過程が未知 (ブラインド) である問題
2. 振幅, 符号, 順序
3. 無相関のある特殊な状態が独立である. 無相関となるだけでは独立成分の分離ができたとはいえない.
4. 4次キュムラント
5. 以下の通り.

$$\begin{aligned}
 E[\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^T] &= \mathbf{V}\mathbf{R}\mathbf{V}^T \\
 &= \sqrt{\mathbf{\Lambda}^{-1}}\mathbf{Q}^T\mathbf{R}\mathbf{Q}\sqrt{\mathbf{\Lambda}^{-1}} \\
 &= \sqrt{\mathbf{\Lambda}^{-1}}\mathbf{\Lambda}\sqrt{\mathbf{\Lambda}^{-1}} = \mathbf{I}
 \end{aligned} \tag{6}$$

6. 以下の通り.

$$\begin{aligned}
 3E[s_i^2]^2 &= 3E\left[(\mathbf{b}_i^T\hat{\mathbf{x}})^2\right]^2 \\
 &= 3E\left[(\hat{\mathbf{x}}^T\mathbf{b}_i)^T(\hat{\mathbf{x}}^T\mathbf{b}_i)\right]^2 \\
 &= 3E[\mathbf{b}_i^T\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^T\mathbf{b}_i]^2 \\
 &= 3(\mathbf{b}_i^T E[\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^T] \mathbf{b}_i)^2
 \end{aligned} \tag{7}$$

ここで, $E[\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}^T] = \mathbf{I}$ より,

$$3E[s_i^2]^2 = 3(\mathbf{b}_i^T \mathbf{b}_i)^2 \tag{8}$$

7. まず, ベクトル $\mathbf{b} = [b_1, b_2, b_3, \dots]^T$ によるスカラー J の偏微分を次のように定義する.

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{b}} = \left[\frac{\partial J}{\partial b_1}, \frac{\partial J}{\partial b_2}, \frac{\partial J}{\partial b_3}, \dots \right]^T$$

さて, 定義に従って, スカラーである評価関数

$$J_i = E\left[\{\mathbf{b}_i^T \hat{\mathbf{x}}(n)\}^4\right] - 3\|\mathbf{b}_i\|^4 + \lambda(\|\mathbf{b}_i\|^2)$$

を $\mathbf{b}_i = [b_i(1), b_i(2)]^T$ ($i = 1, 2$) で微分する. $\hat{\mathbf{x}}(n) = [\hat{x}(1), \hat{x}(2)]^T$ として, 各項および各要素ごとに考えれば,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial J_i}{\partial \mathbf{b}_i} &= \left[E\{4(\mathbf{b}_i^T \hat{\mathbf{x}}(n))^3 \hat{x}(1)\}, E\{4(\mathbf{b}_i^T \hat{\mathbf{x}}(n))^3 \hat{x}(2)\} \right]^T - [12\|\mathbf{b}_i\|^2 b_i(1), 12\|\mathbf{b}_i\|^2 b_i(2)]^T \\
 &\quad + [2\lambda b_i(1), 2\lambda b_i(2)]^T \\
 &= E\left[4\{\mathbf{b}_i^T \hat{\mathbf{x}}(n)\}^3 \hat{\mathbf{x}}(n) - 12\|\mathbf{b}_i\|^2 \mathbf{b}_i + 2\lambda \mathbf{b}_i\right]
 \end{aligned}$$

を得る．この結果を 0 において整理すると次式が得られる．

$$\mathbf{b}_i = -\frac{2}{\lambda} \left\{ E \left[\{ \mathbf{b}_i^T \hat{\mathbf{x}}(n) \}^3 \hat{\mathbf{x}}(n) \right] - 3 \|\mathbf{b}_i\|^2 \mathbf{b}_i \right\}$$